



**UNIVERSITÀ
DI PARMA**

Quantum Portfolio Optimization

Corso di Quantum Computing (a.a. 2024/25)

Merenda Saverio Mattia

Contenuto della discussione

- **Descrivere** il problema di ottimizzazione del portafoglio finanziario
- **Introdurre** l'applicazione del quantum computing al problema
- **Analizzare** i risultati ottenuti e **confrontare** le metodologie

Problema dell'ottimizzazione del portafoglio

- **Obiettivo:** selezionare un insieme di asset che massimizzano i rendimenti e minimizzano il rischio, rispettando un determinato budget
 - $x \in \{0,1\}^n$: vettore delle variabili decisionali binarie (i.e., quali asset selezionare)
 - $\mu \in \mathbb{R}^n$: rendimenti passati degli asset
 - $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$: relazione tra le variazioni dei prezzi degli asset (i.e., covarianza)
 - $q > 0$: avversione al rischio
 - B : budget disponibile

$$\min_x \left(qx^T \Sigma x - x\mu^T + (1^T x - B)^2 \right)$$

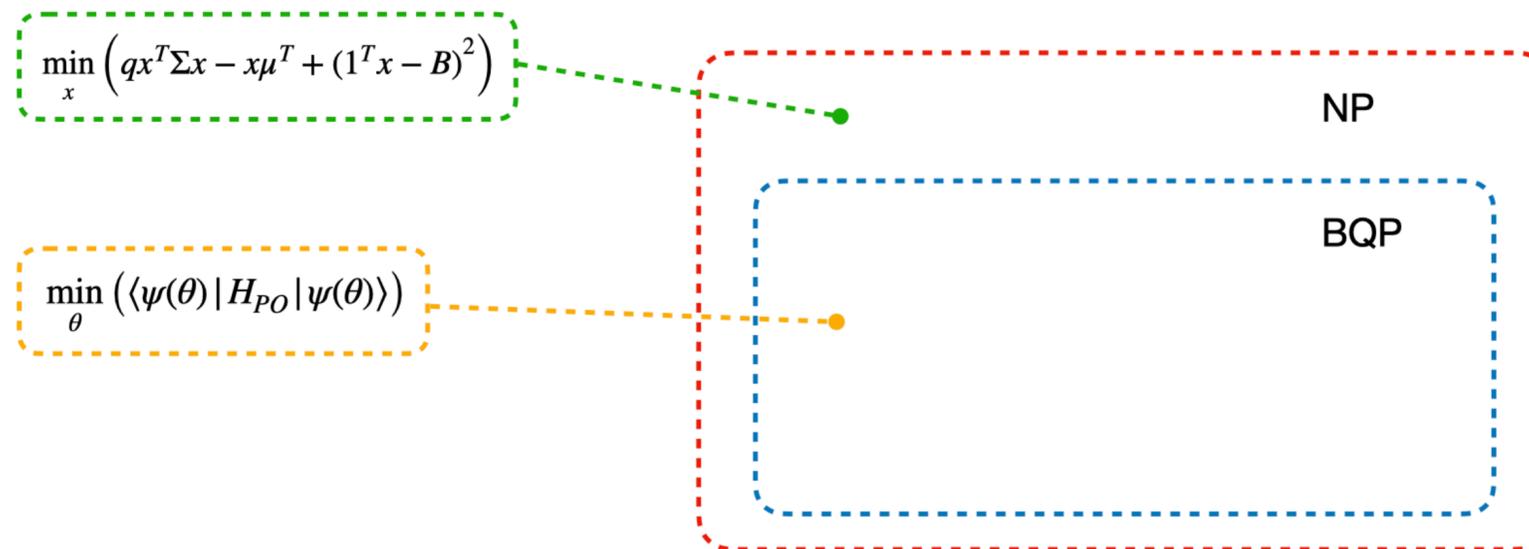
Problema dell'ottimizzazione del portafoglio

- **Obiettivo:** selezionare un insieme di asset che massimizzano i rendimenti e minimizzano il rischio, rispettando un determinato budget

$$\min_x \left(\begin{array}{ccc} \text{risk} & \text{return} & \text{budget penalty} \\ qx^T \Sigma x & -x\mu^T & + (1^T x - B)^2 \end{array} \right)$$

Perché il quantum computing?

- **Limiti classici:** complessità cresce esponenzialmente con il numero di asset
- **Vantaggi:**
 - Capacità di esplorare simultaneamente più configurazioni
 - Classe di complessità Bounded-error Quantum Polynomial (BQP)



Algoritmi proposti (1/3)

Branch-and-bound¹

- **Metodo classico** di riferimento per calcolare la *ground truth*
- Complessità esponenziale: $O(2^n)$

Algoritmi proposti (2/3)

Variational Quantum Eigensolver (VQE)

- **Algoritmo ibrido** che utilizza un ansatz parametrizzato per esplorare lo spazio degli stati

$$E_0 = \langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle, \quad E_0 \leq \langle \psi | H | \psi \rangle, \quad E(\theta) = \langle \psi(\theta) | H | \psi(\theta) \rangle$$

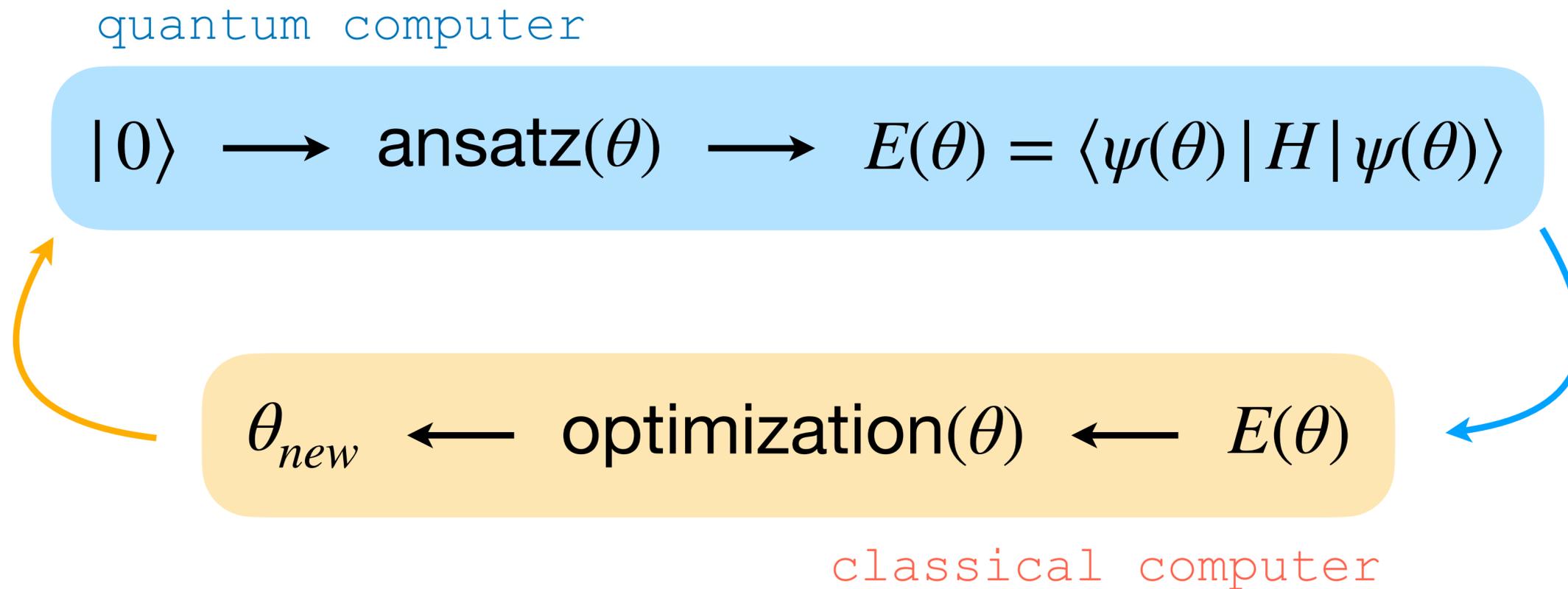
- $|\psi_0\rangle$: stato fondamentale (ground state)
- E_0 : energia fondamentale (ground state energy)

$$E_{min} = \min_{\theta} \langle \psi(\theta) | H | \psi(\theta) \rangle$$

- **CPU**: aggiorna iterativamente i parametri dell'ansatz quantistico θ
- **QPU**: calcola la funzione obiettivo

Algoritmi proposti (2/3)

Variational Quantum Eigensolver (VQE)



Algoritmi proposti (3/3)

Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA)

- **Algoritmo ibrido** che opera attraverso una sequenza di layers (p) per approssimare la soluzione ottimale di un problema combinatorio
 - $\hat{U}_C(\gamma) = e^{-i\gamma\hat{H}_C}$: operatore di costo che codifica i vincoli e la funzione obiettivo
 - $\hat{U}_M(\beta) = e^{-i\beta\hat{H}_M}$: operatore di mixing che promuove l'esplorazione dello spazio delle soluzioni

$$|\psi_p(\gamma, \beta)\rangle = e^{-i\beta_p\hat{H}_M}e^{-i\gamma_p\hat{H}_C}\dots e^{-i\beta_1\hat{H}_M}e^{-i\gamma_1\hat{H}_C}|s\rangle$$

- **CPU**: ottimizza i parametri γ e β per migliorare progressivamente il risultato
- **QPU**: calcola la funzione obiettivo

$$F_p(\gamma, \beta) = \langle\psi_p(\gamma, \beta)|\hat{H}_C|\psi_p(\gamma, \beta)\rangle$$

Algoritmi proposti (3/3)

Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA)

quantum computer

$$|0\rangle \longrightarrow \text{ansatz}(\gamma, \beta) \longrightarrow F(\gamma, \beta) = \langle \psi(\gamma, \beta) | H | \psi(\gamma, \beta) \rangle$$

$$(\gamma_{new}, \beta_{new}) \longleftarrow \text{optimization}(\gamma, \beta) \longleftarrow F(\gamma, \beta)$$

classical computer

Risoluzione del problema (1/6)

- ***Configurazione:***

- Numero di asset: 8
- Budget: 5
- Rischio: 20%
- Ripetizioni: 50

- ***Metodologie utilizzate:***

- Simulazione senza rumore (**noiseless**)
- Simulazione con rumore (**noisy**) per rappresentare hardware reale

Risoluzione del problema (2/6)

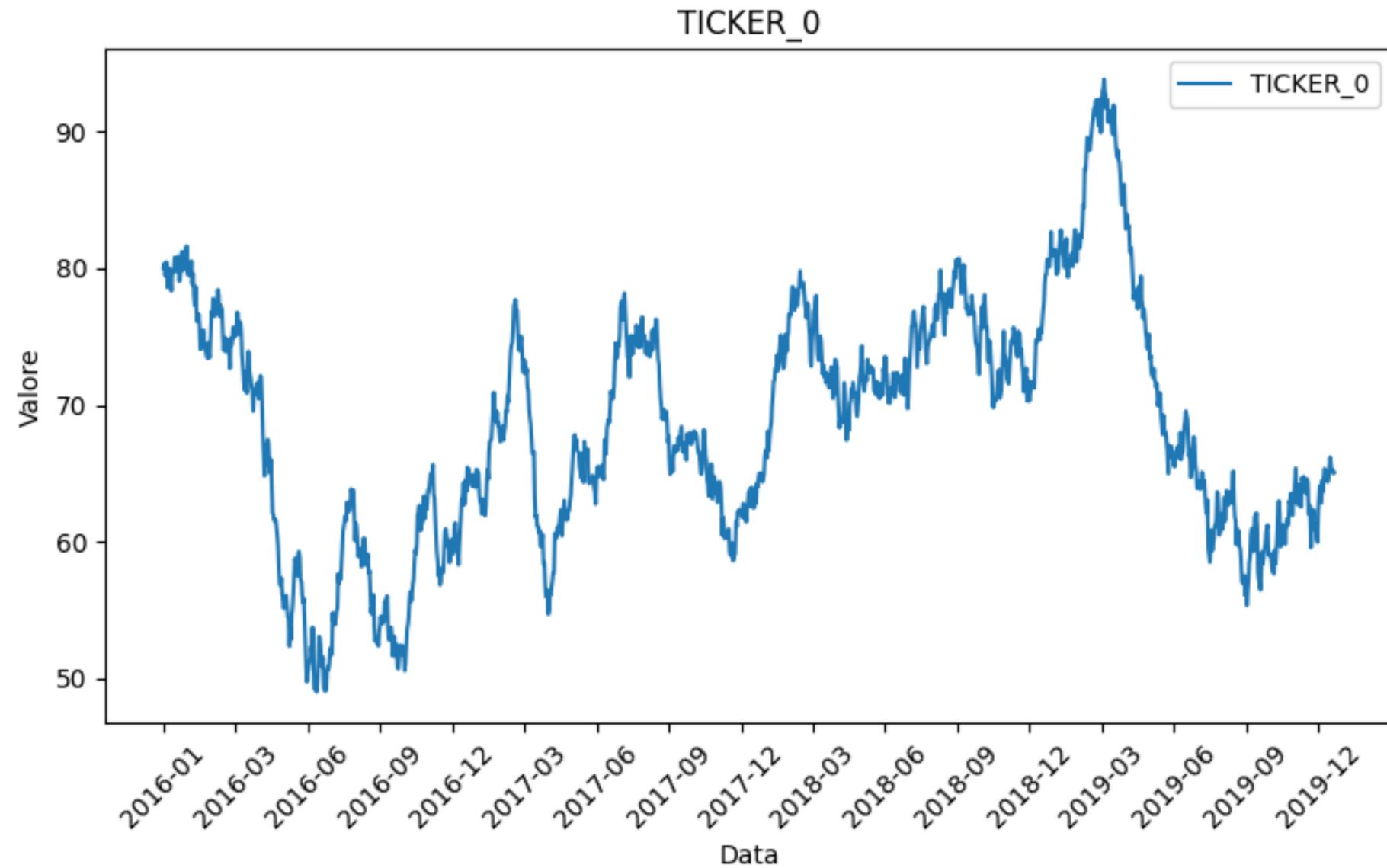
Configurazione dei dati

1. Generati i dati dei rendimenti con la classe **RandomDataProvider**
2. Calcolati μ e Σ con i dati degli andamenti
3. Impostato il problema con la classe **PortfolioOptimization**
4. Problema convertito in programma quadratico con **to_quadratic_program()**

```
dp = RandomDataProvider(  
    # settings  
)  
.run()  
stock_data = dp._data  
  
mu = dp.get_period_return_mean_vector()  
sigma = dp.get_period_return_covariance_matrix()  
  
po = PortfolioOptimization(  
    expected_returns=mu,  
    covariances=sigma,  
    risk_factor=risk_factor,  
    budget=budget  
)  
  
qp = po.to_quadratic_program()
```

Risoluzione del problema (2/6)

Configurazione dei dati



Risoluzione del problema (3/6)

Risoluzione classica

1. Approccio basato su autovalori usando la classe **NumPyMinimumEigensolver**
2. Utilizzo del wrapper **MinimumEigenOptimizer** per il supporto alla risoluzione dei problemi quadratici

```
exact_mes = NumPyMinimumEigensolver()  
exact_eigensolver = MinimumEigenOptimizer(exact_mes)  
result_exact = exact_eigensolver.solve(qp)
```

Risoluzione del problema (4/6)

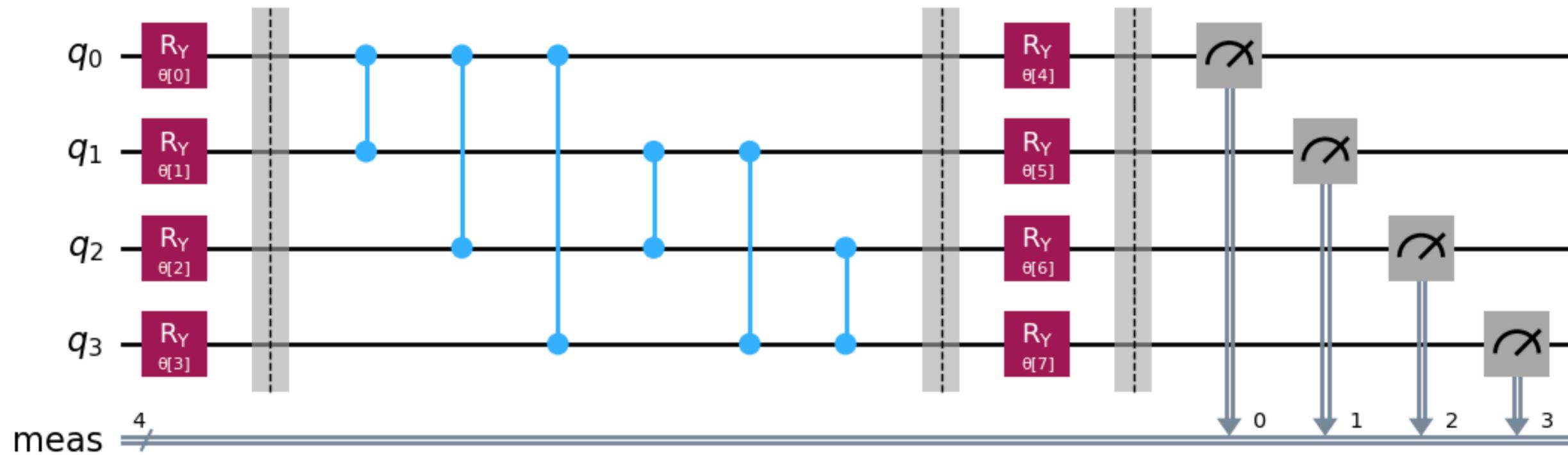
Risoluzione con VQE

1. Generato ansatz con la classe **TwoLocal**
2. Ansatz integrato nel metodo **SamplingVQE** con l'uso di un campionatore **Sampler()** e l'ottimizzatore **cobyla** per la minimizzazione dei parametri
3. Utilizzo del wrapper **MinimumEigenOptimizer**

```
ansatz = TwoLocal(  
    num_qubits=assets,  
    rotation_blocks="ry",  
    entanglement_blocks="cz",  
    reps=1,  
    entanglement="full",  
    insert_barriers=True  
)  
  
vqe_mes = SamplingVQE(sampler=Sampler(),  
                     ansatz=ansatz,  
                     optimizer=cobyla)  
  
vqe = MinimumEigenOptimizer(vqe_mes, penalty)  
  
result = vqe.solve(qp)
```

Risoluzione del problema (4/6)

Risoluzione con VQE



Risoluzione del problema (5/6)

Risoluzione con QAOA

1. Circuito generato con la classe **QAOA** utilizzando il campionatore **Sampler()** e l'ottimizzatore **cobyla**
2. Utilizzo del wrapper **MinimumEigenOptimizer**

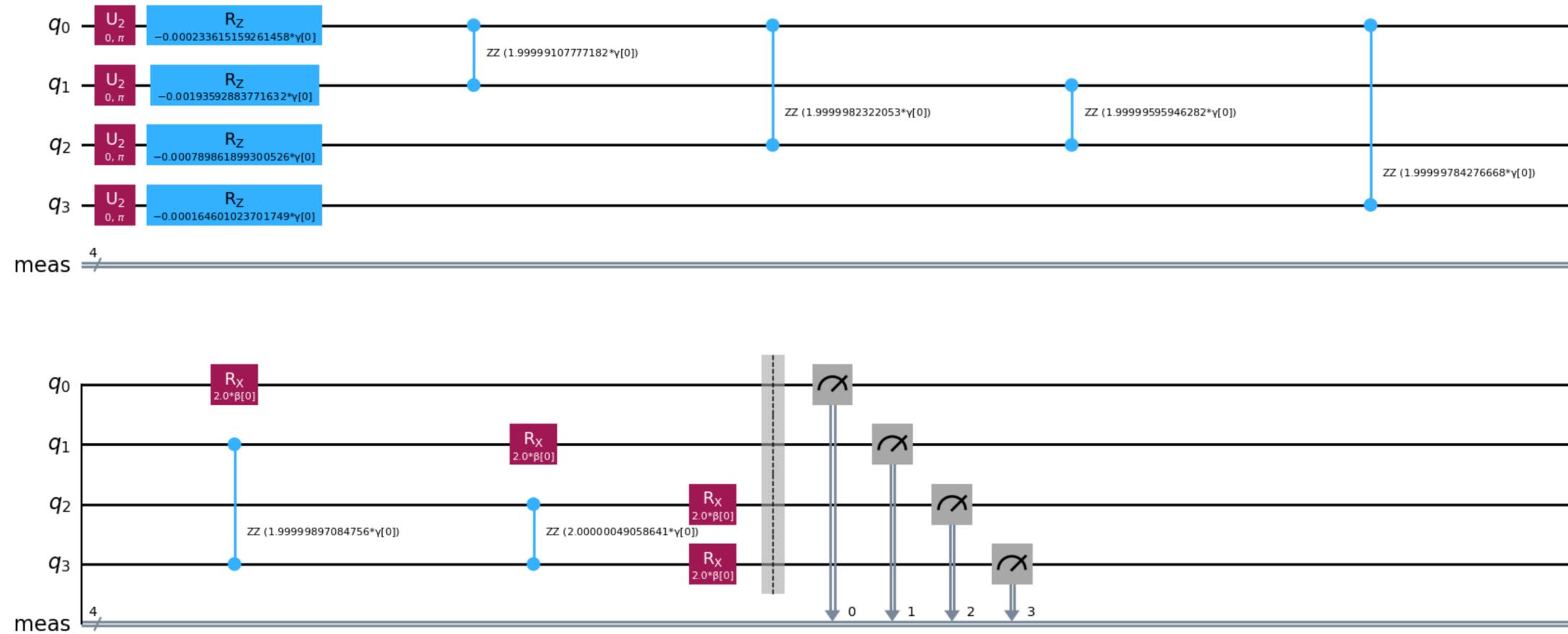
```
qaoa_mes = QAOA(sampler=Sampler(),
                optimizer=cobyla,
                reps=1)

qaoa = MinimumEigenOptimizer(qaoa_mes, penalty)

result = qaoa.solve(qp)
```

Risoluzione del problema (5/6)

Risoluzione con QAOA



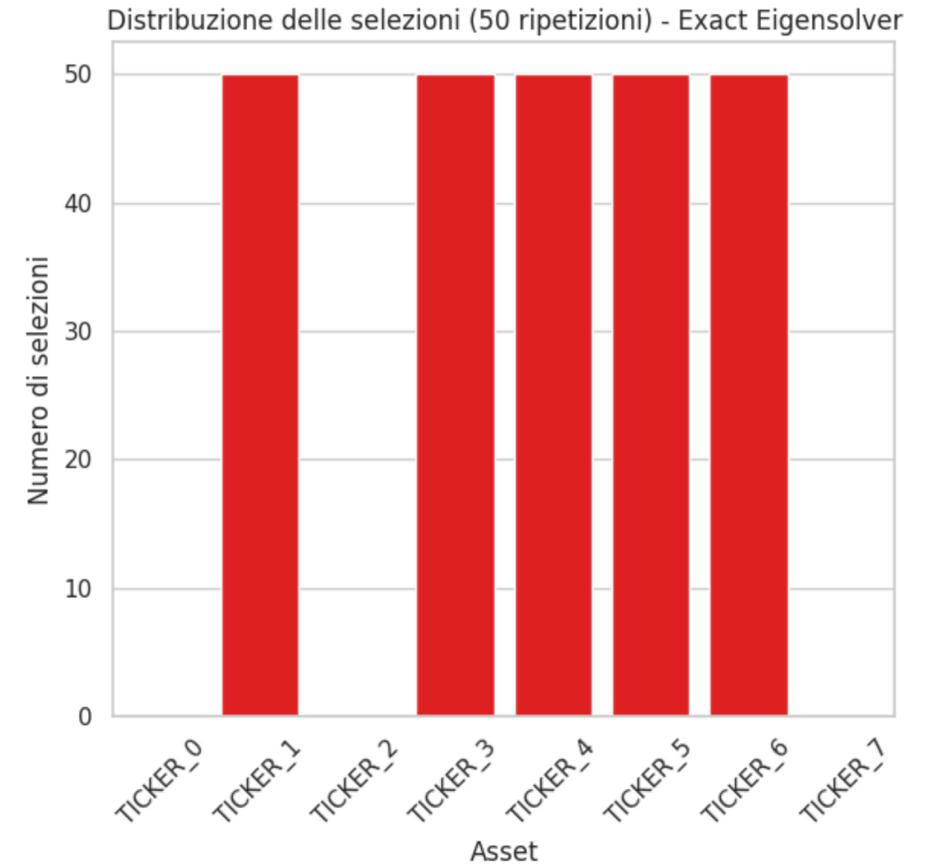
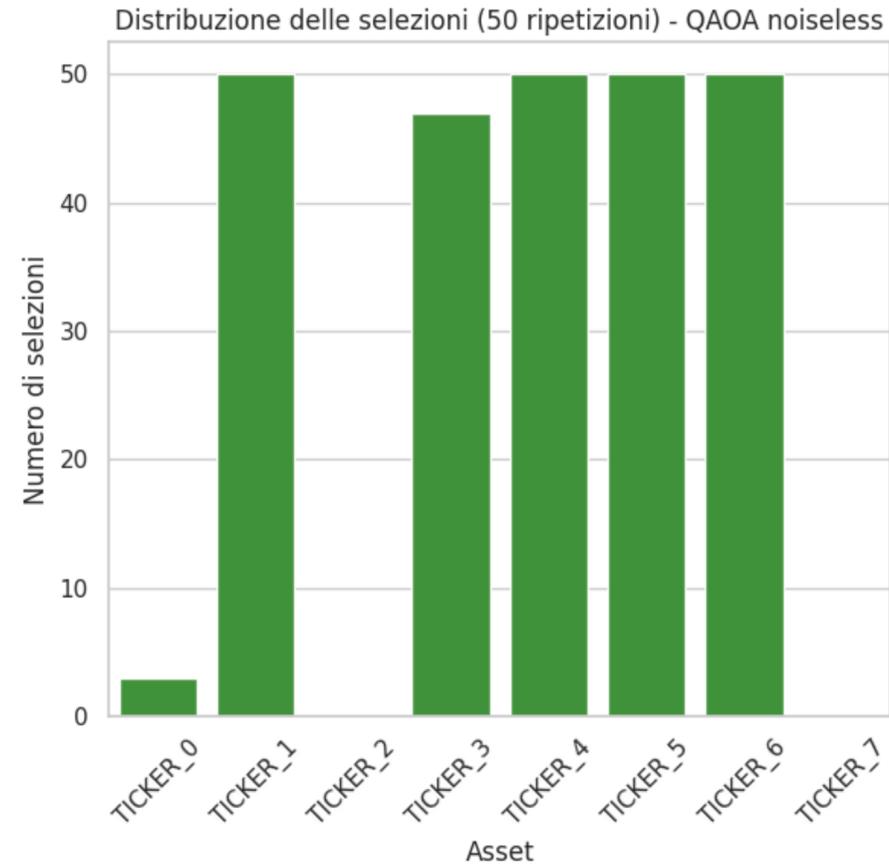
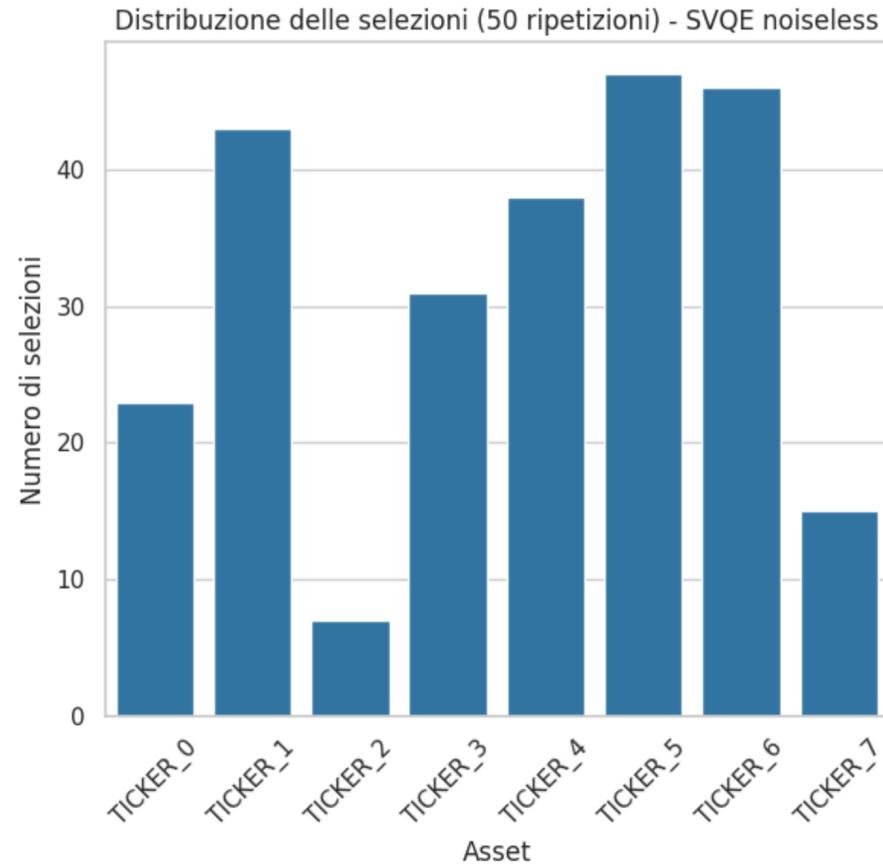
Risoluzione del problema (6/6)

Introduzione del rumore

1. Generato backend con la classe **GenericBackendV2**
2. Generato modello di rumore con la classe **NoiseModel**
3. Generato simulatore con rumore con la classe **AerSimulator**

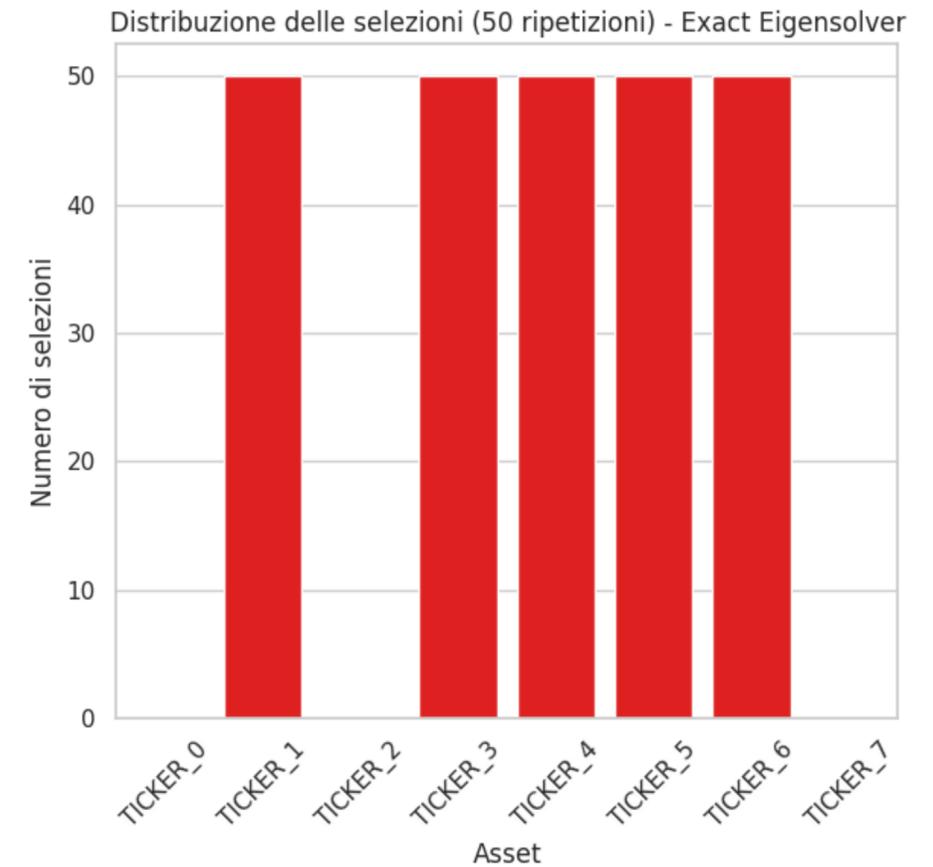
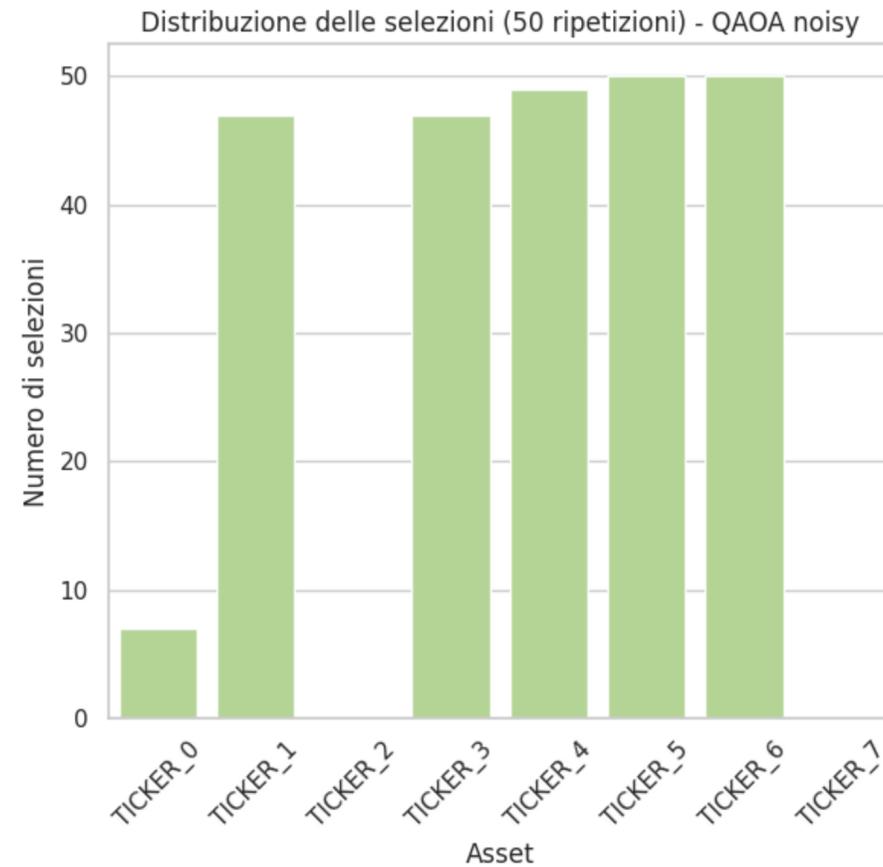
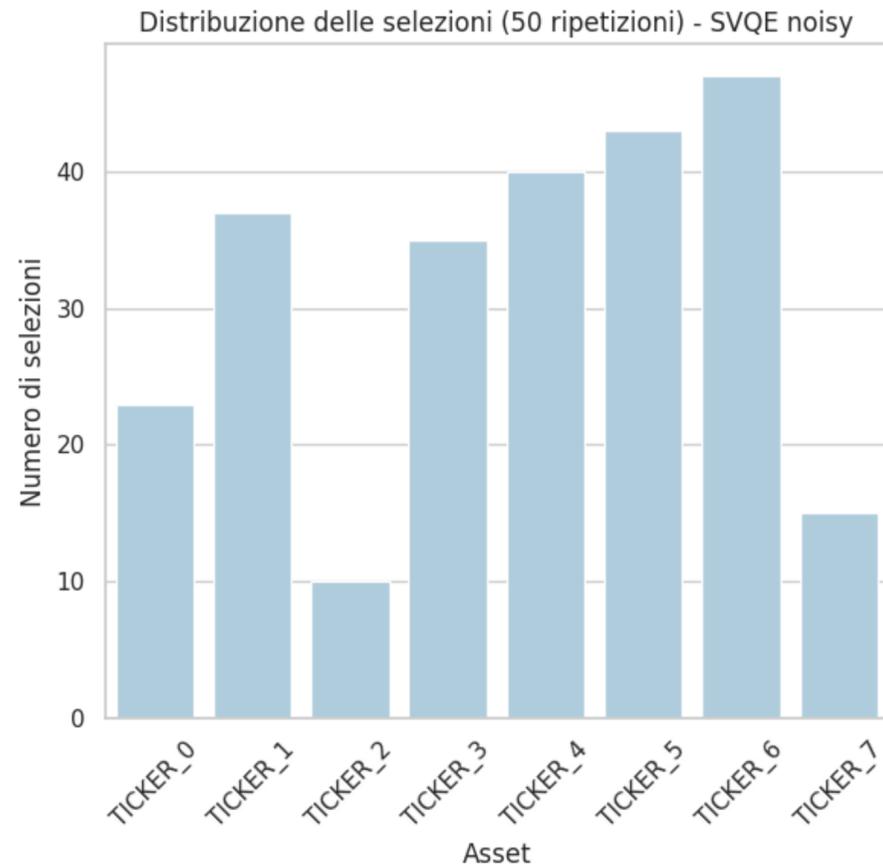
```
backend = GenericBackendV2(num_qubits=assets,  
                           noise_info=True,  
                           seed=seed,  
                           calibrate_instructions=True)  
  
# noise settings  
  
noise_model = NoiseModel.from_backend(backend)  
  
simulator = AerSimulator(noise_model=noise_model)
```

Risultati senza rumore (noiseless)



- Il QAOA tende a concentrarsi su configurazioni ristrette
- Il VQE esplora con maggiore diversificazione

Risultati con rumore (noisy)



- Diminuzione della precisione per VQE e QAOA
- Incremento dell'incertezza nelle distribuzioni degli asset selezionati

Conclusioni

- L'approccio quantistico offre un **potenziale significativo** per problemi complessi come l'ottimizzazione del portafoglio
- **Limiti attuali della tecnologia quantistica:**
 - Problemi su larga scala, come il portafoglio con migliaia di qubit, rimangono **impraticabili**
 - Il rumore **compromette la qualità** delle soluzioni proposte, rendendo inefficace l'approccio quantistico

Q&A

Quantum Portfolio Optimization

Corso di Quantum Computing (a.a. 2024/25)

Merenda Saverio Mattia



**UNIVERSITÀ
DI PARMA**

Bibliografia

1. Land, Ailsa H and Doig, Alison G (2010). *An automatic method for solving discrete programming problems*, Springer.
2. Blekos, Kostas et al., (2024). “A review on quantum approximate optimization algorithm and its variants”, *Physics Reports*, Vol. 1068, pp. 1–66.
3. Buonaiuto, Giuseppe et al., (2023). “Best practices for portfolio optimization by quantum computing, experimented on real quantum devices”, *Scientific Reports*, Vol. 13 No. 1, p. 19434.
4. Qiskit (2024). *Portfolio Optimization using Qiskit Finance*, qiskit-community.github.io/qiskit-finance/tutorials/portfolio-optimization